

L'importance de la prise en considération des moments d'ordre supérieur dans l'optimisation du portefeuille

The importance of considering higher order moments in portfolio optimization

Auteur 1 : Lahbous Adam,

Auteur 2 : Zammar Rachid.

Lahbous Adam, Doctorant chercheur

Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales – Agdal

Université Mohammed V de Rabat

Laboratoire d'Etudes et de Recherche en Sciences de Gestion

adam_lahbous@um5.ac.ma

Zammar Rachid, Enseignant chercheur

Faculté des Sciences de Rabat

Université Mohammed V de Rabat

Laboratoire d'Etudes et de Recherches en Sciences de Gestion

rachid.zammar@um5.ac.ma

Déclaration de divulgation : L'auteur n'a pas connaissance de quelconque financement qui pourrait affecter l'objectivité de cette étude.

Conflit d'intérêts : L'auteur ne signale aucun conflit d'intérêts.

Pour citer cet article : LAHBOUS.A & ZAMMAR.R (2021) « L'importance de la prise en considération des moments d'ordre supérieur dans l'optimisation du portefeuille », African Scientific Journal « Volume 03, Numéro 8 » pp: 126-141.

Date de soumission : Septembre 2021

Date de publication : Octobre 2021



DOI : 10.5281/zenodo.5717840

Copyright © 2021 – ASJ



Résumé

Ce papier de recherche traite de l'importance de l'intégration des moments d'ordre supérieur dans l'optimisation d'un portefeuille d'actions lorsque les rendements de ces actions ne suivent pas une loi gaussienne. Dans ce cadre, notre travail de recherche illustre, à travers une étude empirique sur un échantillon de 20 actions cotées à la bourse de Casablanca, comment optimiser un portefeuille lorsque les rendements ne sont pas distribués normalement surtout dans un marché financier émergent comme celui du Maroc où les rendements des actions ont des queues de distribution épaisses.

L'étude a démontré que l'optimisation du portefeuille en intégrant les moments d'ordre supérieur est une optimisation multi-objectifs dont le résultat dépend des préférences des investisseurs. L'étude a démontré aussi que l'utilisation de l'optimisation «moyenne-variance», lorsque les rendements ne sont pas distribués normalement, peut diriger les investisseurs vers un niveau de rendement plus élevé que celui jugé véritable.

Mots clés : Moyenne-Variance, optimisation du portefeuille, non-normalité des rendements, moments d'ordre supérieur.

Abstract

This research paper discusses the importance of incorporating higher order moments in optimizing a stock portfolio when the returns of those stocks don't follow a Gaussian law. In this context, our research work illustrates, through an empirical study on a sample of 20 stocks listed on the Casablanca Stock Exchange, how to optimize a portfolio when returns are not normally distributed, especially in an emerging financial market like that of Morocco. where stock returns have thick distribution tails.

The study demonstrated that portfolio optimization by integrating higher order moments is a multi-objective optimization whose outcome depends on investor preferences. The study also demonstrated that the use of "mean-variance" optimization, when returns are not distributed normally, can direct investors to a higher level of return than what is in reality.

Keywords : Mean-variance, portfolio optimization, non-normality of returns, Higher Order Moments.

Introduction

L'optimisation de portefeuille d'actifs est un sujet qui occupe toujours l'intérêt des chercheurs en mathématiques financières.

Dans ce cadre, Harry Markowitz a introduit en 1952 le modèle « moyenne-variance ». Ce modèle utilise la variance des rendements de portefeuille comme mesure de risque.

En effet, le modèle de Markowitz consiste à minimiser la variance ou l'écart-type pour un niveau de rendement donné ou de maximiser le rendement du portefeuille pour un niveau de risque donné.

Cependant, l'une des principales critiques adressées à ce modèle est que ce dernier suppose que les rendements des actifs suivent une loi gaussienne. Cette condition, dans la plupart des cas n'est pas vérifiée. Ce qui rend la variance insuffisante comme véritable indicateur de risque.

Comment l'investisseur peut-il alors optimiser son portefeuille d'actions lorsque La distribution des rendements n'est pas normale ?

Ainsi, l'hypothèse centrale de notre recherche consiste dans ce qui suit :

« Les moments d'ordre supérieur sont importants pour l'optimisation d'un portefeuille de titres lorsque les rendements de ces titres ne sont pas normalement distribués ».

Notre recherche vise l'explication de l'importance de l'intégration des moments d'ordre supérieur dans l'optimisation d'un portefeuille dont les rendements des titres qui le constituent ne suivent pas une loi gaussienne. La réalisation d'une telle démarche passe tout d'abord par l'adoption d'un positionnement épistémologique appropriée. Il est à noter que les recherches en sciences de gestion, particulièrement sont d'inspiration positiviste ou constructiviste. Toutefois, elles ne s'inscrivent pas systématiquement dans l'un de ces paradigmes. Ainsi, nous tenons, à adopter, dans notre cas, un positionnement flexible afin d'intégrer les apports de l'exploration, de la revue de littérature, et du mix formé par différentes disciplines, à savoir les risques de l'investissement traditionnels et ISR, la psychologie ou comportement des investisseurs et les statistiques.

Nous proposons donc un aménagement entre des paradigmes différents. Notre posture épistémologique sera une position positiviste aménagée. Ce qui fait que notre recherche

privilégiera un mode de raisonnement déductif qui investit à la fois la littérature et le terrain de recherche de manière qualitative.

1. Revue de littérature

Le modèle Moyenne-Variance suppose que la distribution des rendements est gaussienne et que la fonction d'utilité des investisseurs est quadratique, dans le sens où ces derniers ne s'intéressent qu'aux deux premiers moments.

Empiriquement ces deux hypothèses ne sont pas vérifiées, ce qui a poussé plusieurs auteurs (Hwang et Satchell (1999), Maringer, et Parpas,(2009), Mhiri et Prigent (2010) et Jaaman et al (2011)) à introduire des moments d'ordre supérieurs à deux pour mieux prendre en considération la distribution non gaussienne des rendements.

Pour cette raison ils ont élargi la notion de risque, qui a été évaluée seulement par la variance des rendements selon Markowitz, pour inclure l'asymétrie de la distribution des rendements (appelé aussi Skewness, moment d'ordre 3) et l'aplatissement de la distribution des rendement (le Kurtosis, moment d'ordre 4)

Tobin (1958) et Rubinstein (1973) ont déjà montré que, dans le choix d'un portefeuille, les moments d'ordre supérieurs doivent être pris en compte, et que la fonction d'utilité des investisseurs n'est pas quadratique.

Arditti (1975) et Krauss et Litzenberger (1976) ont montré que l'investisseur cherche en général un Skewness strictement positif, et donc la fonction d'utilité de l'investisseur ne peut pas être quadratique.

L'introduction des moments d'ordre supérieur a été bien illustrée par Lai (1991), Chunchinda, Dandapani, Hamid et Prakash (1997). Ils ont notamment analysé en détail la préférence des investisseurs pour le Skewness.

En effet, une asymétrie négative signifie que la probabilité que le rendement soit négatif est plus grande de la probabilité que le rendement soit positif. En revanche, si le coefficient d'asymétrie est positif, cela indique que les pertes sont petites et les rendements sont très élevés. D'autre part, C'est l'aplatissement qui peut refléter l'existence d'événements extrêmes, si le kurtosis est supérieur à 3 alors la distribution est dite leptokurtique, si non elle est dite platikurtique.

Scott et Horvath (1980) ont montré que la préférence est positive pour les valeurs positives de chaque moment central impair et négatif pour chaque moment central pair.

Le problème qui se pose, lors de l'élargissement du cadre moyenne-variance, est la détermination de solution du programme d'optimisation tenant compte de l'asymétrie et de l'aplatissement. En effet, le problème d'optimisation est multi-objectif.

Davies, et al. (2009) ont introduit une extension de la programmation des objectifs polynomiaux (PGP) dans la sélection de portefeuilles. L'avantage du cadre PGP est qu'il est suffisamment général pour s'adapter aux désirs des investisseurs pour les moments d'ordre supérieur par des paramètres de préférence.

2. Méthodologie

2.1. Données

Nous avons constitué un portefeuille à partir de 20 actions cotées à la bourse de Casablanca. En essayant de choisir des actions de différents secteurs, et dont les rendements ne sont pas positivement corrélés, dans le but d'avoir un portefeuille bien diversifié.

Tableau N°1 : Les sociétés composant le portefeuille

Raison sociale	Ticker	Secteur d'activité
AFRIQUIA GAZ	GAZ	Pétrole et Gaz
AGMA	AGM	Assurances
ALUMINIUM DU MAROC	ALM	Bâtiment et Matériaux de construction
BCP	BCP	Banques
AUTO NEJMA	NEJ	Distributeurs
CARTIER SAADA	CRS	Agroalimentaire et Production
CTM	CTM	Transport
DARI COUSPATE	DRI	Agroalimentaire et Production
HIGHTECH PAYMENT SYSTEMS	HPS	Matériels, Logiciels et Services Informatiques
ITISSALAT AL-MAGHRIB	IAM	Télécommunications
LABEL VIE	LBV	Distributeurs
M2M Group	M2M	Matériels, Logiciels et Services Informatiques
MAGHREB OXYGENE	MOX	Chimie
MAGHREBAIL	MAB	Sociétés de financement et Autres Activités Financières
MICRODATA	MIC	Matériels, Logiciels et Services Informatiques
OULMES	OUL	Boissons
PROMOPHARM S.A	PRO	Industrie Pharmaceutique
SALAFIN	SLF	Sociétés de financement et Autres Activités Financières
SMI	SMI	Mines
SOTHEMA	SOT	Industrie Pharmaceutique

Tableau élaboré par les auteurs

L'analyse porte, ici, sur une série de données concernant 2488 valeurs (les cours journaliers des actions) correspondant au nombre de jours ouvrables de la bourse au cours de la période s'étendant du 04/01/2010 au 31/12/2019, pour chacune des sociétés.

Sur la base de ces données nous pouvons obtenir le rendement en temps t des actions en utilisant la formule :

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Où P_t : est la valeur de l'action sur le marché

Et P_{t-1} : est la valeur de l'action sur le marché en $t-1$.

Ainsi, nous obtenons pour chaque action 2487 valeurs exprimant les variations relatives journalières durant la période considérée.

2.2. Intégration du coefficient d'asymétrie et du coefficient d'aplatissement dans l'optimisation du portefeuille

Les deux premières équations représentent le rendement attendu et la variance du portefeuille qui sont également les deux premiers moments de la distribution des rendements. Ce sont les composants essentiels du processus d'optimisation.

$$\text{Moyenne} = E(R_p) = X^T \bar{R} = \sum_{i=1}^N X_i R_i$$

$$V(R_p) = X^T M X = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \text{cov}(R_i, R_j)$$

Le Skewness absolu, ou le moment centré d'ordre trois, du rendement du portefeuille est définie par :

$$S(p) = E(X^T (R - \bar{R}))^3 = \sum_{i=1}^N X_i^3 S_i^3 + 3 \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^N X_i^2 X_j S_{ij} + \sum_{j=1}^N X_i X_j^2 S_{ij} \right] \quad (i \neq j)$$

où S_i^3 est le Skewness de l'actif i , S_{ij} mesurent les co-skewness, qui se produisent entre les distributions jointes du R_i et du R_j .

Le Kurtosis absolu d'un portefeuille est donnée par cette formule :

$$K(p) = E(X^T(R - \bar{R}))^4 = \sum_{i=1}^N X_i^4 K_i^4 + 4 \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^N X_i^3 X_j K_{iii} + \sum_{j=1}^N X_i X_j^3 K_{ijj} \right] + 6 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i^2 X_j^2 K_{iijj}$$

($i \neq j$)

où K_i^4 est le Kurtosis de l'actif i , K_{iii} , K_{ijj} , et K_{iijj} sont les Co-Kurtosis des distributions jointes R_i et du R_j .

Se référant aux travaux de Lai, Yu et Wang (2006), le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement peuvent être incorporés dans un modèle d'optimisation multi-objectif "Polynomial Goal Programming".

La première étape de cette optimisation multi-objectif est de trouver les valeurs E^* , V^* , S^* , K^* , qui représentent respectivement le meilleur scénario possible de l'espérance, la variance, le Skewness et le Kurtosis du portefeuille.

Ces valeurs sont obtenues, en optimisant chacun des objectifs suivants de manière indépendante :

$$(Q1): \begin{cases} \text{Max}_x X^T \bar{R} \\ \text{sous contraintes} \\ X^T \mathbf{1} = 1 \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

$$(Q2): \begin{cases} \text{Min}_x X^T M X \\ \text{sous contraintes} \\ X^T \mathbf{1} = 1 \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

$$(Q3): \begin{cases} \text{Max}_x \frac{E(X^T(R - \bar{R}))^3}{(\sigma_p)^3} \\ \text{sous contraintes} \\ X^T \mathbf{1} = 1 \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

$$(Q4): \begin{cases} \text{Min}_X \frac{E(X^T(R - \bar{R}))^4}{(\sigma_p)^4} \\ \text{sous contraintes} \\ X^T \mathbf{1} = 1 \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

Dans une deuxième étape, il s'agit d'incorporer les préférences des investisseurs dans la construction du PGP. En effet, l'optimisation du portefeuille avec les moments d'ordre élevée est une solution du PGP, et les différents objectifs peuvent être atteints.

Soient d_1, d_2, d_3 et d_4 les variables "objectif" non négatives qui tiennent compte des déviations, respectivement, des rendements espérés, de la Variance, du Skewness et du Kurtosis par rapport à des niveaux désirés, E^*, V^*, S^*, K^* .

Étant données les préférences de l'investisseur $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, le problème de sélection de portefeuille multi-objectif se transforme en un problème ayant une seule fonction objectif simple :

$$(P_z): \begin{cases} \text{Min } Z = \left| \frac{d_1}{E^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2} + \left| \frac{d_3}{S^*} \right|^{\lambda_3} + \left| \frac{d_4}{K^*} \right|^{\lambda_4} \\ \text{sous contraintes} \\ X^T \bar{R} + d_1 = E^* \\ X^T M X - d_2 = V^* \\ \frac{E(X^T(R - \bar{R}))^3}{(\sigma_p)^3} + d_3 = S^* \\ \frac{E(X^T(R - \bar{R}))^4}{(\sigma_p)^4} - d_4 = K^* \\ X^T \mathbf{1} = 1 \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

La valeur minimale de Z peut être trouvée étant donné un ensemble de préférences de l'investisseur λ_k tels que $k = 1 \dots 4$, puisque les solutions des sous-problèmes (Q1, Q2, Q3, Q4) ont pratiquement une liaison avec le problème (P_z) , où tous les objectifs E, M, S , et K sont simultanément pris en considération.

Les valeurs des variables "objectif" d_1, d_2, d_3 et d_4 sont souvent strictement positives. Ces valeurs sont très proches de zéro. Elles témoignent ainsi d'une bonne optimisation multi-objectif. Ainsi, la sélection du portefeuille optimal, en tenant compte des grands moments, serait une solution du PGP.

Nous avons utilisé Solver dans Excel pour estimer les poids qui optimisent la fonction Z pour diverses préférences $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

3. Analyse et discussion des résultats

3.1. Statistiques descriptives

Tableau N°2 : statistiques descriptives des moments et tests de normalités des rendements

	Moyenne	Variance	Ecart type	Skewness	Kurtosis	Le test de Jarque-Bera	
						Statistique	Probabilité
GAZ	0,00060106	0,000377901	0,01943968	0.187619	8.856056	3568.243	0.000000
AGM	0,000154921	0,000214137	0,014633405	-0.151629	13.47648	11383.07	0.000000
ALM	0,0003879	0,00043436	0,020841316	0.006224	8.488931	3122.068	0.000000
BCP	0,000198436	0,000218456	0,014780248	-14.78076	499.5931	25644965	0.000000
NEJ	0,000236314	0,000187567	0,013695517	-0.075341	16.70166	19456.43	0.000000
CRS	0,000486473	0,000511261	0,022611083	0.307596	7.164290	1836.212	0.000000
CTM	0,00067879	0,00034829	0,018662537	0.217484	9.663422	4620.679	0.000000
DRI	0,000791591	0,000231682	0,015221113	0.553979	12.65917	9795.372	0.000000
HPS	0,00099079	0,000532967	0,023086086	0.062090	5.314910	556.9047	0.000000
IAM	0,000100871	0,000103923	0,010194284	-0.980117	16.25710	18610.34	0.000000
LBV	0,000507035	0,000360731	0,018992926	0.152982	7.814425	2411.592	0.000000
M2M	0,000423668	0,000708688	0,026621192	0.335480	5.020775	469.8068	0.000000
MOX	0,000274598	0,000447707	0,021159094	0.082020	7.283516	1904.153	0.000000
MAB	0,000361696	0,000304738	0,01745676	0.069002	9.939978	4992.895	0.000000
MIC	0,000557009	0,000753354	0,027447294	-7.798120	216.8478	4764067	0.000000
OUL	0,000555681	0,000302316	0,017387225	0.319635	10.07479	5229.052	0.000000
PRO	0,000291197	0,000426318	0,020647461	-0.061984	12.22609	8822.224	0.000000
SLF	0,000283637	0,000295767	0,017197869	-0.210323	9.329350	4169.623	0.000000
SMI	0,000497356	0,000501397	0,02239189	0.042869	5.771446	796.6964	0.000000
SOT	0,000282506	0,000262419	0,016199346	-3.136738	81.49572	642571.8	0.000000

Tableau élaboré par les auteurs, les tests de JARQUE-BERA ont été réalisés sur Eviews

Nous remarquons d'après le tableau que le Skewness est négatif pour 8 actions, ce qui signifie que leurs distributions des rendements sont étalées à gauche. Alors que ce coefficient est positif

pour les 12 autres actions, ce qui signifie que leurs distributions sont étalées à droite. Ce qui prouve que toutes les distributions sont asymétriques.

En ce qui concerne le Kurtosis, nous constatons qu'il est largement supérieur à 3 pour toutes les distributions. Ce qui prouve que toutes les distributions sont leptokurtiques.

Les valeurs du test de Jarque-Bera pour toutes les distributions des rendements sont supérieures à 5,99 la valeur critique. D'où le rejet de l'hypothèse H_0 : « la distribution suit une loi normale ».

Les distributions des rendements de toutes les actions ne suivent pas une loi normale.

3.2. Déterminations des niveaux désirés du rendement espéré, de la Variance, du Skewness et du Kurtosis

Tableau N°3 : Optimisations des moments de manière indépendantes

Portefeuille	Moyenne max	Variance min	Skewness max	Kurtosis min
Moyenne	0,0009908	0,0003612	0,0004230	0,0004805
Variance	0,0005330	0,0000198	0,0000718	0,0000588
Ecart-type	0,0230861	0,0044552	0,0084726	0,0076678
Skewness	0,0621277	-0,2130785	0,6815342	0,1513623
Kurtosis	2,3219876	3,5231926	5,1184156	0,3525563

	Poids des titres			
GAZ	0	0,025182462	0,012418162	0
AGM	0	0,077603206	0	0
ALM	0	0,027217161	0,006970918	0,080290937
BCP	0	0,048277829	0	0
NEJ	0	0,098594558	0,362556202	0
CRS	0	0,024705546	0	0
CTM	0	0,05047793	0,059541818	0,134068704
DRI	0	0,070253867	0	0,097628742
HPS	1	0,022790349	0	0
IAM	0	0,164475632	0	0,097063476
LBV	0	0,041925487	0,132173179	0,123638022
M2M	0	0,014344707	0	0,167115335
MOX	0	0,032950924	0	0
MAB	0	0,046303661	0,03563847	0
MIC	0	0,014550149	0,010983663	0
OUL	0	0,051892837	0,340792912	0,069757346
PRO	0	0,038365527	0,038480098	0,075458607
SLF	0	0,058163775	0,000444574	0,000316357
SMI	0	0,027032862	0	0,154662465
SOT	0	0,064891532	0	0

Tableau élaboré par les auteurs, les calculs ont été réalisés sur Excel

- Le rendement moyen optimal que le portefeuille peut générer est $E^*=0,00099079$
- La variance minimal que le portefeuille peut présenter est $V^*= 0,0000198487$
- Le Skewness maximal que le portefeuille peut atteindre est $S^*= 0,681534209$
- Le Kurtosis minimal que le portefeuille peut présenter est $K^*= 0,35255631$

3.3. Optimisation multi-objectif du portefeuille

Tableau N°4 : Optimisation multi-objectif pour différents niveaux de préférences des investisseurs

Investisseur	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_1	1	3	1	1	1	3	1	1	3
λ_2	1	1	3	1	3	1	1	1	1
λ_3	1	1	1	1	1	3	3	0	2
λ_4	1	0	1	3	3	1	0	3	3
Moyenne	0,000442207	0,000442661	0,000442145	0,000442164	0,000443014	0,000441844	0,000442531	0,000443000	0,000441407
Variance	0,000038528	0,000038470	0,000038475	0,000038496	0,000038466	0,000038441	0,000038452	0,000038488	0,000038478
Ecart type	0,006207063	0,006202406	0,006202796	0,006204540	0,006202122	0,006200064	0,006201005	0,006203859	0,006203081
Skewness	0,191627882	0,191215032	0,191318604	0,191556656	0,191010246	0,191294513	0,191068320	0,191192561	0,191634234
Kurtosis	0,352556299	0,352556229	0,352556280	0,352556336	0,352556291	0,352556042	0,352556330	0,352556302	0,352556296
Poids des titres									
GAZ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AGM	0,046747166	0,048070577	0,047410987	0,048664370	0,048364136	0,047248909	0,046703771	0,048102807	0,047341082
ALM	0,029493374	0,029118374	0,029824614	0,028858472	0,029400458	0,029919339	0,030184168	0,029273773	0,029759511
BCP	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NEJ	0,048517035	0,046321503	0,047272062	0,047505431	0,046586513	0,047347917	0,047409044	0,047651091	0,048442910
CRS	0,038005419	0,038004821	0,038751228	0,037258687	0,038276110	0,038477447	0,038104423	0,036934096	0,034293197
CTM	0,139210892	0,139565400	0,139232651	0,139317318	0,139616109	0,138985688	0,139224566	0,139508105	0,138309198
DRI	0,097394559	0,097634515	0,097476052	0,097973081	0,097892942	0,097218783	0,097834484	0,097922453	0,098483085
HPS	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IAM	0,092140158	0,091689974	0,091623155	0,091659777	0,090961880	0,092170199	0,091418836	0,091557228	0,093253819
LBV	0,120361532	0,119651795	0,119617229	0,119982626	0,119678047	0,119705312	0,119514926	0,120141174	0,119527263
M2M	0,104137887	0,103891712	0,104118778	0,104009246	0,103762889	0,103959499	0,103801505	0,103874943	0,104933455
MOX	0,094747204	0,094697018	0,094424383	0,094773750	0,094331722	0,094215808	0,094705032	0,094546796	0,094560802
MAB	0,001305950	0,000632521	0,000873415	0,001253303	0,000847338	0,000926895	0,001267040	0,001477671	0,000103837
MIC	0,000368777	0,002606459	0,000389831	0,001083251	0,002631070	0,000423718	0,000832741	0,002831769	0,000011479
OUL	0,036427288	0,035619056	0,035673804	0,035656803	0,035490151	0,035624256	0,035878470	0,036352621	0,036692350
PRO	0,064853302	0,064300912	0,064711935	0,064977217	0,064024742	0,065037211	0,064866233	0,064138995	0,065169820
SLF	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SMI	0,080698986	0,081046308	0,080869201	0,081026964	0,081310121	0,081121446	0,081054210	0,081149747	0,081619735
SOT	0,005590470	0,007149056	0,007730674	0,005999704	0,006825772	0,007617573	0,007200549	0,004536730	0,007498455

Tableau élaboré par les auteurs, les calculs ont été réalisés sur Excel

A l'aide du Solver sur Excel, nous avons obtenu les poids qui optimisent le portefeuille pour différentes combinaisons des préférences $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

L'investisseur 1 a le même degré de préférence pour la moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement.

L'investisseur 2 a une préférence élevée pour la moyenne, faible pour la variance et l'asymétrie et pas d'aplatissement.

L'investisseur 3 a une préférence élevée pour la variance et faible pour la moyenne, l'asymétrie et l'aplatissement.

L'investisseur 5 a une préférence élevée pour la variance et l'aplatissement et faible pour la moyenne et l'asymétrie.

L'investisseur 9 a une préférence moyenne pour l'asymétrie, élevée pour la moyenne et l'aplatissement et faible pour la variance.

Nous remarquons, d'après le tableau N°4, que pour un même niveau de préférence λ_2 (les investisseurs 1,2,4,6,7,8,9), nous obtenons à chaque fois un portefeuille avec des préférences différentes si nous changeons les autres degrés de préférence $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4)$.

3.4. Optimisation « Moyenne-Variance », « Moyenne-Skewness » et « Moyenne-Kurtosis »

Tableau N°5 : Optimisation « Moyenne-Variance »

Portefeuille	1	2	3	4	5	6	7
Moyenne	0,00044637	0,00049302	0,00052703	0,00054626	0,00057183	0,00058700	0,00060747
Variance	0,00002200	0,00002500	0,00002800	0,00003000	0,00003300	0,00003500	0,00003800
Skewness	-0,02130513	0,04217966	0,07417914	0,08712212	0,10169369	0,11157647	0,12627937
Kurtosis	2,27093503	2,11111035	2,09904916	2,11562583	2,15277030	2,19451578	2,26225859
Poids des titres							
GAZ	0,03932052	0,04700568	0,05270207	0,05576306	0,06008217	0,06305376	0,06681557
AGM	0,05222041	0,03821004	0,02783649	0,02186875	0,01360862	0,00660780	0
ALM	0,02525213	0,02427553	0,02353914	0,02314896	0,02235269	0,02155083	0,01965932
BCP	0,03200024	0,02428444	0,01794270	0,01451844	0,00836081	0,00263617	0
NEJ	0,07744546	0,06579301	0,05735009	0,05259870	0,04547567	0,03889339	0,02797019
CRS	0,02838115	0,03059800	0,03197265	0,03285210	0,03392020	0,03412061	0,03414884
CTM	0,07509546	0,08858366	0,09839660	0,10396216	0,11154521	0,11644155	0,12309426
DRI	0,11409885	0,13806964	0,15561052	0,16555181	0,17919117	0,18866533	0,20275008
HPS	0,05279053	0,06928312	0,08131278	0,08807741	0,09733410	0,10362636	0,11286627
IAM	0,09659021	0,05900019	0,03192072	0,01661453	0	0	0
LBV	0,05390864	0,06046185	0,06524237	0,06796005	0,07162623	0,07354992	0,07626767
M2M	0,01715630	0,01800635	0,01908813	0,01958280	0,02016177	0,02023715	0,01985869
MOX	0,02901119	0,02669605	0,02526531	0,02441338	0,02271772	0,02115594	0,01796896
MAB	0,04802505	0,04887526	0,04962951	0,05001692	0,05025325	0,04965061	0,04758783
MIC	0,02050116	0,02389097	0,02612557	0,02745819	0,02923771	0,03033024	0,03155289
OUL	0,06249039	0,06832703	0,07249199	0,07488456	0,07815246	0,08011543	0,08265152
PRO	0,03388619	0,03145250	0,02978950	0,02881764	0,02707663	0,02557288	0,02266497
SLF	0,05227982	0,04901768	0,04667147	0,04530829	0,04328122	0,04062017	0,03609889
SMI	0,03247925	0,03546893	0,03759093	0,03892122	0,04045889	0,04113621	0,04172164
SOT	0,05706707	0,05270008	0,04952145	0,04768104	0,04516348	0,04203563	0,03632241

Tableau élaboré par les auteurs, les calculs ont été réalisés sur Excel

Tableau N°6 : Optimisation « Moyenne-Skewness »

Portefeuille	1	2	3	4	5	6	7
Moyenne	0,00041524	0,00038988	0,00038926	0,00038902	0,00038896	0,00038921	0,00038938
Variance	0,00002200	0,00002500	0,00002800	0,00003000	0,00003300	0,00003500	0,00003800
Skewness	0,06152580	0,34301588	0,43037475	0,47381807	0,52435035	0,55087508	0,58260287
Kurtosis	1,72470417	2,76124034	3,26436968	3,53264449	3,85503557	4,03024478	4,24435872
Poids des titres							
GAZ	0,04515812	0,04006948	0,03831086	0,03719774	0,03553721	0,03458799	0,03293133
AGM	0,07472944	0,06271889	0,05523932	0,05094984	0,04538281	0,04162364	0,03616501
ALM	0,04389179	0,02419343	0,02216412	0,02106864	0,01951200	0,01887386	0,01756327
BCP	0,01243486	0,00611926	0,00575202	0,00550363	0,00528448	0,00544575	0,00505287
NEJ	0,05784275	0,16880775	0,19412033	0,20815866	0,22657514	0,23767518	0,25253027
CRS	0,02638719	0,02099845	0,01726787	0,01505429	0,01227457	0,01063818	0,00778867
CTM	0,06839539	0,07315068	0,07295387	0,07259890	0,07191126	0,07143310	0,07091210
DRI	0,10073390	0,06245231	0,04645978	0,03846405	0,02890975	0,02359923	0,01571311
HPS	0,02657815	0	0	0	0	0	0
IAM	0,12595177	0,12357505	0,11479505	0,11000129	0,10357327	0,09934430	0,09291669
LBV	0,06101042	0,06946291	0,07867428	0,08349173	0,08959115	0,09304551	0,09908842
M2M	0,02478598	0,01118610	0,00874176	0,00725124	0,00530287	0,00425070	0,00304196
MOX	0,03973514	0,01738718	0,01083775	0,00745757	0,00281302	0	0
MAB	0,05815878	0,04591522	0,04660066	0,04693937	0,04731884	0,04733220	0,04694236
MIC	0,00628366	0,00686203	0,00711683	0,00744368	0,00780472	0,00814301	0,00834069
OUL	0,05089885	0,13669978	0,16141191	0,17467211	0,19191530	0,20215907	0,21634559
PRO	0,04924497	0,03264524	0,03373285	0,03435554	0,03534578	0,03605864	0,03700981
SLF	0,02763827	0,03658130	0,03257719	0,03057007	0,02788295	0,02628820	0,02396855
SMI	0,04507950	0,02572738	0,02137699	0,01887823	0,01571609	0,01374855	0,01066477
SOT	0,05506106	0,03544757	0,03186654	0,02994343	0,02734879	0,02575288	0,02302452

Tableau élaboré par les auteurs, les calculs ont été réalisés sur Excel

Tableau N°7 : Optimisation « Moyenne-Kurtosis»

Portefeuille	1	2	3	4	5	6	7
Moyenne	0,00038893	0,00039216	0,00039325	0,00039867	0,00040749	0,00041317	0,00041979
Variance	0,00002200	0,00002500	0,00002800	0,00003000	0,00003300	0,00003500	0,00003800
Skewness	0,04974571	0,09414905	0,11480818	0,11900324	0,12189075	0,12423853	0,11943338
Kurtosis	1,19317378	0,73434662	0,51598777	0,43114448	0,35610603	0,32974211	0,30774192
Poids des titres							
GAZ	0,01016105	0	0	0	0	0	0
AGM	0,06699662	0,06565269	0,06532600	0,06576415	0,06561379	0,06714223	0,07194306
ALM	0,03996067	0,04834446	0,05371516	0,05686523	0,06088010	0,06262659	0,06511419
BCP	0,00961073	0,00530381	0,00200832	0	0	0	0
NEJ	0,08595448	0,07513936	0,06718900	0,06203031	0,05383024	0,04558617	0,03170347
CRS	0,02943583	0,02864390	0,02612670	0,02488130	0,02341718	0,01768135	0
CTM	0,08661457	0,09900573	0,10603121	0,11074274	0,11702663	0,12026581	0,12268128
DRI	0,08190291	0,08280698	0,08109533	0,08046527	0,07996491	0,08142125	0,08584302
HPS	0,01897093	0,00896431	0	0	0	0	0
IAM	0,14257021	0,12920828	0,12267162	0,11601817	0,10597479	0,09872168	0,09228274
LBV	0,05864612	0,06699957	0,07260877	0,07726602	0,08373273	0,08547334	0,08472932
M2M	0,03393445	0,05213738	0,06542880	0,07404973	0,08561625	0,09429302	0,10571670
MOX	0,05683816	0,07502773	0,08614773	0,09153560	0,09763770	0,10101577	0,10511055
MAB	0,03317628	0,01822137	0,00223355	0	0	0	0
MIC	0,00763881	0,00519503	0,00329153	0,00167095	0	0	0
OUL	0,03910701	0,03487256	0,03488166	0,03235867	0,03151160	0,03185713	0,03958688
PRO	0,05410931	0,05790146	0,05990855	0,06062600	0,06100929	0,06226220	0,06540946
SLF	0,06000314	0,05891987	0,06100319	0,05858161	0,05234185	0,04341739	0,03225201
SMI	0,04320315	0,05569349	0,06646923	0,07264425	0,08144296	0,08823606	0,09762731
SOT	0,04116555	0,03196204	0,02386365	0,01449998	0	0	0

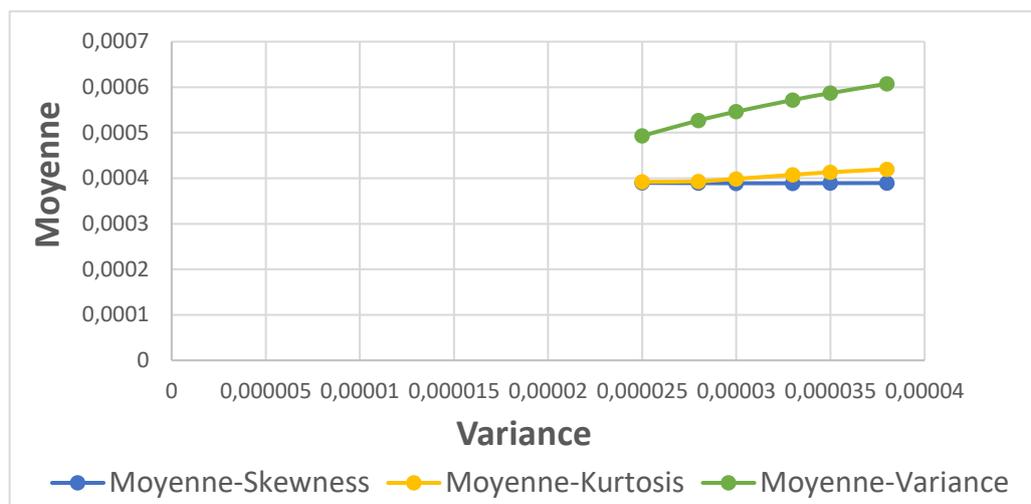
Tableau élaboré par les auteurs, les calculs ont été réalisés sur Excel

Le tableau N°5 contient des portefeuilles optimisés sur la base de la moyenne et la variance. Ces portefeuilles se trouvent sur la frontière efficiente de Markowitz. Ils sont obtenus en maximisant la moyenne pour un niveau de la variance.

Le tableau N°6 contient des portefeuilles optimisés sur l'asymétrie en gardant la variance fixe.

Le tableau N°7 contient des portefeuilles optimisés sur l'aplatissement en gardant la variance fixe.

Figure N°1 : Frontières efficaces des moments d'ordre supérieur.



Source : effectués sur Excel

La figure N°1 montre les trois frontières efficaces, «Moyenne-Variance», «Moyenne-Skewness» et « Moyenne-Kurtosis ». Ces trois courbes sont tracées sur la base de la moyenne et de la variance.

D'après la comparaison des trois courbes, il est remarquable que l'optimisation «Moyenne-Variance» nous dirige vers un niveau de rendement moyen plus élevé que celui de l'optimisation «Moyenne-Skewness» et « Moyenne-Kurtosis », pour un même niveau de variance.

Conclusion

En guise de conclusion, lorsque les rendements ne sont pas distribués normalement, il est indispensable de se baser seulement sur la moyenne des rendements et la variance toute en négligeant les autres moments d'ordre supérieur à 2, à savoir le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement. Ainsi l'optimisation d'un portefeuille en intégrant ces deux coefficients est un problème multi-objectifs qui vise simultanément à maximiser la moyenne et le Skewness et à minimiser la variance et le kurtosis, et cette optimisation multi-objectif, où les pondérations des titres sont estimées à l'aide d'un logiciel numérique, nécessite la détermination, au préalable, des niveaux des préférences de l'investisseur pour chaque coefficient.

Et enfin, nous pouvons dire aussi que le risque n'existe pas seulement dans la variance mais aussi dans l'asymétrie et l'aplatissement, et que l'utilisation de l'optimisation « moyenne-variance », lorsque les rendements ne sont pas distribués normalement, peut diriger les investisseurs vers un niveau de rendement plus élevé que celui jugé véritable.

BIBLIOGRAPHIE

Alan Kraus and Robert H. Litzenberger. (1976). Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. *The Journal of Finance*, 31(4), 1085-1100.

Fred D. Arditti. (1975). Skewness and Investors' Decisions : A Reply. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 10(1), 173-176.

H.M Markowitz. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 77-91.

Hwang, S. and Satchell, S. (1999). Modelling Emerging Market Risk Premia Using Higher Moments. *International Journal of Finance and Economics*, 4(4), 271-296.

J. Tobin. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2), 65-86.

Lai, K. K., Yu, L., and Wang, S. (2006). Mean-variance-skewness-kurtosis-based portfolio optimization. In *Computer and Computational Sciences, 2006. IMSCCS'06. First International Multi-Symposiums on*, 2, 292-297

Maringer, et Parpas. (2009). Global optimization of higher order moments in portfolio selection. *Journal of Global Optimization*, 43, 219-230.

Mark E. Rubinstein. (1973). The Fundamental Theorem of Parameter-Preference Security Valuation. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8(1), 61-69.

Mark E. Rubinstein. (1973). A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory. *The Journal of Finance*, 28(1), 167-181.

Mark E. Rubinstein. (1973). A Comparative Statics Analysis of Risk Premiums. *The Journal of Business*, 46(4), 605-615.

Maroua MHIRI, Jean-Luc PRIGENT. (2010). International Portfolio Optimization with Higher Moments. *International Journal of Economics and Finance*, 2(5), 157-169.

P. Chunhachinda, K. Dandapani, S. Hamid and A.J. Prakash. (1997). Portfolio selection and skewness: evidence from international stock market. *Journal of Banking and Finance*, 21(2), 143-167.

R. Davies, H. M. Kat, Sa Lu. (2009). Fund of hedge funds portfolio selection: A multiple-objective approach. *Journal of Derivatives & Hedge Funds*, 15, 91-115.

Robert C. Scott and Philip A. Horvath . (1980). On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance. *The Journal of Finance*, 35(4), 915-919.

Saiful Hafizah Jaaman, Weng Hoe Lam et Zaidi Isa. (2011). Higher moment portfolio management with downside risk. *American Journal of Social and Management Sciences*, 2(2), 220-224.

Soosung Hwang, Stephen E. Satchell. (1999). Modelling emerging market risk premia using higher moments. *International journal of finance and economics*, 4(4), 271-296.

Tsong-Yue Lai. (1991). Portfolio selection with skewness: A multiple-objective approach. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1, 293-305.